

Розбір задачі «Козак Вус і екзамен»

В задачі просто необхідно правильно реалізувати визначення оцінки Вуса яке описане в умові.

Розбір задачі «Козак Вус і гармата»

Якщо за x позначити відрізок над якому знаходиться Козак, а за y висоту на якій він знаходиться, то можна імітувати всі постріли Вуса наступним чином. Спочатку $x = 1, y = 0$ (знаходиться на першому відрізку на висоті 0). Після пострілу ми кожен раз перевіряємо, чи ми впадемо на поточному відрізку, чи полетимо далі: якщо $a_{x+1} \leq y$ або $x = n$ ми впадемо на відрізок x , а інакше полетимо далі, причому x та y збільшаться на одиницю. Якщо ж ми падаємо, то робимо y рівним 0 і збільшуємо кількість пострілів на одиницю. Далі все повторюється допоки $x \neq n$.

Розбір задачі «Козак Вус і календар»

Помітимо, що впорядкована трійка чисел є коректною датою для конкретного формату якщо $a[M] \geq D$. Тоді $x.y.z$ є коректною датою для всіх форматів якщо виконуються наступні умови: $a[x] \geq y, a[y] \geq x, a[x] \geq z, a[z] \geq x, a[y] \geq z, a[z] \geq y$ (кожна пара чисел означає номер місяця і номер доби в деякому форматі).

Рішення за $O(n^3)$: перебираємо усі трійки чисел і перевіряємо чи задовільняють вони всі умови.

Рішення за $O(n^2)$: перебираємо числа x та y , що задовільняють умови $a[x] \geq y$ та $a[y] \geq x$. Тоді на число z отримуємо такі обмеження: $a[z] \geq \max(x, y)$ і $\min(a[x], a[y]) \geq z$.

Підрахуємо масив $dp[i][j]$ — кількість чисел z таких, що $z \leq i$ і $a[z] \geq j$. Масив рахується за простою формулою $dp[i][j] = dp[i-1][j] + (a[i] \geq j)$, де $(a[i] \geq j)$ дорівнює 1, якщо $a[i] \geq j$ і дорівнює 0 інакше.

Тоді для зафіксованих чисел x та y $dp[\min(a[x], a[y])][\max(x, y)]$ буде кількістю чисел z , що задовільняють усі умови.

Розбір задачі «Козак Вус і домноження»

Помітимо, що якщо $x = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_w^{l_w}$, де p_i — різні прості числа, а l_i — натуральні числа (розклад числа x на прості множники), то за 1 операцію домноження можна перетворити x на будь-яке $y = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_w^{t_w}$, де $l_i \leq t_i \leq 2 \cdot l_i$. Тоді за k домножень можна перетворити x на будь-яке $y = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_w^{q_w}$, де $l_i \leq q_i \leq 2^k \cdot l_i$.

Зрозуміємо, у якому випадку відрізок (пара описує відрізок чисел a_l, a_{l+1}, \dots, a_r з масиву) l, r є «гарним». По-перше, розклад на прості множники всіх чисел a_l, a_{l+1}, \dots, a_r повинен складатися з одних і тих самих простих чисел (нехай це будуть p_1, p_2, \dots, p_w). Тобто, відрізнятися розклади можуть лише степенню входження того чи іншого простого числа. Скажемо, що \min_i — мінімальне таке число, що у розкладі деякого числа з відрізка, число p_i входить у степені \min_i . Аналогічно позначимо за \max_i максимальне таке число. Тоді відрізок є «гарним», якщо виконується $\max_i \leq 2^k \cdot \min_i$ ($1 \leq i \leq w$).

Тепер зрозуміло, що якщо відрізок l, r є «гарним», і виконується $r - l \geq 1$, то відрізки $l + 1, r$ та $l, r - 1$ також є гарними. Тоді ми можемо двома вказівниками підтримувати максимальний «гарний» відрізок. Для перевірки «гарності» відрізка будемо для кожного простого числа використовувати дерево відрізків яке буде знати мінімальне та максимальне входження простого числа на відрізка (входження у розкладі на прості множники). Так як в умові сказано, що прості дільники менші за 30, ми можемо використовувати всього 10 дерев відрізків (існує рівно 10 простих чисел менших за 30).

Розбір задачі «Козак Вус і країна»

Розв'язок: Помітимо, що країна має вигляд дерева (один із видів графів), при чому означення регіону з центром у місті v еквівалентне означенню піддерева вершини v . Тому далі все буде у термінах графа. Зокрема, a_x — число записане в вершині x , а «переселення» — обмін значеннями, записаними у вершинах x та y .

Введемо sz_v - кількість вершин в піддереві v . Далі ділення усюди цілочисельне.

По-перше, помітимо, що медіана піддерева v рівна x тоді й тільки тоді, коли в піддереві v суттєве число x , кількість чисел менших за x рівна $\frac{sz_v}{2}$, а кількість чисел більших за x рівна $\frac{sz_v - 1}{2}$.

Зафіксуємо піддерево v та розглянемо числа x , для яких воно «гарне». Введемо позначення:

Масив A - відсортовані значення всього дерева.

Масив B - відсортовані значення піддерева v .

Обидва масиви 1-індексовані.

$A[0]$ поставимо рівним $-inf$, а $A[n+1]$ поставимо рівним $+inf$.

Перше обмеження на число x :

Числа $x \leq A[\frac{sz_v}{2}]$ не підходять, бо скільки б «переселень» ми не зробили, кількість чисел менших за x в піддереві буде менша за $\frac{sz_v}{2}$. Числа $x \geq A[n+1 - \frac{sz_v-1}{2}]$ не підходять, бо кількість чисел більших за x в піддереві завжди буде менша за $\frac{sz_v-1}{2}$. Для усіх чисел $A[\frac{sz_v}{2}] < x < A[n+1 - \frac{sz_v-1}{2}]$, присутніх в масиві A , при достатній кількості «переміщень» (наприклад $k = n$), піддерево v було б «гарним».

Отже, перше обмеження на число x : $A[\frac{sz_v}{2}] < x < A[n+1 - \frac{sz_v-1}{2}]$

Друге обмеження:

Тепер за $L[x]$ позначимо мінімальну кількість «переселень», яка необхідна для «гарності» піддерева при умові, що x присутнє в дереві. Розглядати $L[x]$ будемо лише для таких x , для яких виконується перше обмеження.

Введемо $mid = \frac{sz_v}{2} + 1$. Як ми бачимо, якщо не робити «переселень», то число $B[mid]$ і буде медіаною піддерева, а отже, $L[mid] = 0$.

Доведемо, що для будь-якого $m > 0$, для всіх $B[mid - m] \leq x \leq B[mid + m]$ виконується $L[x] \leq m$. Причому $L[B[mid - m]] = L[B[mid + m]] = m$.

Покажемо, що для будь-якого $m > 0$, для всіх $B[mid + m - 1] < x \leq B[mid + m]$ виконується $L[x] = m$. За таких умов, кількість чисел менших за x в піддереві на m більше ніж потрібно. Отже, ми m чисел менших за x з піддерева обмінємо з m числами більше або рівними за x не із піддерева. Причому, якщо x не знаходилося в піддереві, то його необхідно свапнути першочергово.

Покажемо, що для будь-якого $m > 0$, для всіх $B[mid - m] \leq x < B[mid - m + 1]$ виконується $L[x] = m$. Розглянемо окремо випадки $x = B[mid - m]$ й $x > B[mid - m]$:

- При $x = B[mid - m]$ кількість чисел менших за x на m менша ніж потрібно. Так як число x уже присутнє в піддереві, нам достатньо m свапів.
- При $B[mid - m] < x < B[mid - m + 1]$ кількість чисел менших за x на $(m-1)$ менша ніж потрібно. Але через те, що x не присутнє в піддереві, нам необхідно використати одне «переселення» для того, щоб обміняти число x і будь-яке число з піддерева, яке більше за x . Отже, в цьому випадку знову необхідно m «переселень».

Твердження доведено, а тому друге обмеження на число x наступне: $B[mid - k] \leq x \leq B[mid + k]$, де $mid = \frac{sz_v}{2} + 1$.

Отже, конкретне піддерево v є «гарним» для усіх чисел які задовільняють обидві умови, а це усі числа з перетину відрізка $[A[\frac{sz_v}{2}] + 1, A[n+1 - \frac{sz_v-1}{2}] - 1]$ та відрізка $[B[mid - k], B[mid + k]]$. Тоді наш алгоритм рішення: для кожного піддерева знаходимо відрізок чисел, для яких він є «гарним». Відповіддю на запит буде кількість відрізків, що перетинають x .

Тоді рішення за $O(n^2 + m \log n)$: Знаходимо масив A . Знаходимо масив sz . Перебираємо вершину v , знаходимо масив B . За формулами знаходимо необхідний відрізок. «Кількість відрізків, що перетинають x » є стандартною задачею з багатьма рішеннями. Одним із них є знаходження кількості відрізків у яких права границя менша за x , або ліва більша за x . Усі інші відрізки перетинають x .

Рішення за $O(n \log n + m)$ або $O(n \log n + m \log n)$ Помітимо, що в масиві B ми шукаємо лише два значення: $B[mid - k]$ та $B[mid + k]$. Також необхідно знати, що якщо вписати в масив C

ейлерів обхід дерева, то вершини конкретного піддерева будуть утворювати підмасив C . А отже, B для конкретного v - відсортований підмасив C . Ми звели задачу до такої: нам потрібно знайти $(mid - k)$ -те та $(mid + k)$ -те по величині число на відрізку в масиві C . Така задача вирішується такою структурою даних як персистентне дерево відрізків. Для кожного префіксу масива C ми зберігаємо свою версію дерева відрізків. Тоді якщо ми шукаємо відповідь на відрізку l, r , то різниця версій r та $l - 1$ і буде шуканим підмасивом.