Ксоня та граф

Автор та розробник: Святослав Бідзіля

Можна набрати часткові бали розв'язками за допомогою алгоритмів Дейкстри та Флойда, які шукають діаметр в довільному графі.

Щоб отримати вищі бали знайдемо особливість графу з умови. Оскільки граф з $n-1$ ребром утворює дерево, то граф з n ребер утворює дерево з одним циклом. Будемо розглядати граф, як цикл і кореневі дерева, з коренями в вершинах циклу. Далі є два різних випадки, де може бути діаметр. Або діаметр цього графа знаходиться в одному з дерев, або проходить через цикл.

Для першого випадку нескладно скористатися будь-яким відомим алгоритмом пошуку діаметра в дереві та для кожного дерева знайти діаметр сумарно за $O(n)$.

Для другого випадку важливо зрозуміти, що якщо діаметр проходить через дві вершини циклу (назвемо їх u і v), то та частина діаметра, яка знаходиться в деревах з цими коренями доходить до найглибшого листа в такому дереві. Дійсно, якби вона доходила не до найглибшого листа, можна було б легко покращити відповідь, пішовши від вершини до найглибшого листа.

Знайдемо для кожної вершини циклу глибину найбільшого листа в її дереві (за допомогою dfs-у). Назвемо це число для i-ї вершини h_i. Назвемо відстанню між двома вершинами в циклі $dist(x, y)$ найкоротшу відстань по ребрах циклу між вершинами x і y. Тепер задача звелася до максимізації $h_x + h_y + dist(x, y)$ по усім x, y на циклі.

Як ефективно порахувати $dist(x, y)$? Перенумеруємо вершини циклу від 1 до m. Запишемо всі ваги ребер циклу в масив w, так що вага ребра з вершини i циклу в наступну записана в w_i. Нехай $\sum_i^m w_i = S$. Тоді порахуємо відстань, якби ми йшли по одній стороні циклу $f(i, j) = \sum_{k=i}^{j-1} w_k$. В іншому випадку, ми йдемо по іншій стороні циклу, тому використовуємо всі інші ребра. Тому $dist(i, j) = min(S - f(i, j), f(i, j))$.

Вже зараз задачу можна розв'язати на високий бал за $O(n^2)$, рахуючи шукану величину по всім вершинам циклу.

Для отримання повного балу можна помітити, що при фіксованому i існує таке k, що при всіх вершинах j від i до k $f(i, j) < S - f(i, j)$, а при всіх вершинах j від k до i $f(i, j) >= S - f(i, j)$. Іншими словами, функція монотонна. Для всіх вершин з першої групи відстань дорівнює $f(i, j) = p_{j-1} - p_{i-1}$(Якщо ввести масив p - префіксних сум масиву w), а діаметр на таких вершинах зводиться до $min(h_x + h_y + p_{y-1} - p_{x-1}) = min((h_x - px - 1) + (h_y + p_{y-1}))$. При фіксованому x такий мінімум по всіх j можна легко знайти за допомогою різних структур даних - дерева відрізків, підтримуючи множину усіх кандидатів і т.д. Сума для другої групи вершин схожа і підтримується аналогічно. Для пошуку оптимального k можна використовувати бінарний пошук, або підтримувати k методом двох вказівників.

При використанні сетів або дерева відрізків з'являється додатковий логарифмічний фактор, тому асимптотика рішення $O(n \log n)$.