

Ксоня та дерево

Автор та розробник: Святослав Бідзіля

Спробуємо розв'язати задачу, якщо в нас вже множина чисел S з піддерева і нам потрібно знайти k -е число з множини всіх можливих XOR-сум підмножин.

У випадку, якщо всі числа є степеню двійки можна помітити, що якщо число є в наборі, то ми можемо або додати його у відповідь, або ні. Так можна зробити з кожним бітом, тому всього буде в множині $2^{|S|}$ чисел. Побудувати k -е число можна жадібно - будемо йти з найбільших чисел до найменших. Якщо ми можемо не ставити якийсь біт (чисел з цим бітом не встановленим $\geq k$), то ми не будемо його ставити. Інакше, поставимо цей біт і зменшимо k на кількість чисел, в яких цей біт не встановлений.

Для розв'язання задачі в загальному вигляді потрібно розглянути числа, як набір векторів над полем Z_2 . Тоді, хог двох чисел - це додавання цих векторів. Тому, для знаходження всіх можливих хог-ів підмножин, можна побудувати базис векторів, які представляють числа з множини S і подібно до рішення в минулому пункті жадібно встановлювати біти від більшого до меншого. Побудова базису може бути реалізована за $O(\log^3 A)$ (Може бути пришвидшено в 32 рази використовуючи бітові операції на числах), а пошук k -го елемента в побудованому базисі - за $O(\log A)$.

Тепер, повернемося до оригінальної задачі. Для перших трьох підгруп було достатньо знайти всю множину чисел пошуком вглибину, а далі використати розв'язок з першої частини.

Блок 1 Будь-який повний перебір за $O((n + q)2^n)$ проходив цей блок.

Блок 2-3 Блок проходився якщо перераховувати базиси для всіх вершин за $O(n)$, або знаходити кожний раз заново.

Блок 4 Можна реалізувати задачу для множини чисел, а не дерева.

Блок 5 Якщо в підгрупі немає запитів на зміну числа, то можемо передрахувати всі базиси для кожної вершини дерева - базис вершини це просто базис чисел з базисів її дітей. Це можна порахувати за $O(n \log^2 A)$, а далі відповідати за запити за $O(\log A)$.

Блок 6 Блок вирішувався простішим варіантом базису, достатньо було перевірити наявність потрібного біта в піддереві.

Блок 7 У загальному випадку, можемо звернутися до техніки Ейлерового обходу дерева. Побудуємо за Ейлеровим обходом дерева дерево відрізків, де в кожній вершині буде зберігатися XOR базис її підвідрізка. Для мерджа двох вершин додамо вектори одного базису в інший. Піддерево кожної вершини тепер буде цілісним відрізком на Ейлеровому обході, а отже запит базису на піддереві зводиться до одного запиту до дерева відрізків, а запит зміни числа - до одиничної заміни в дереві відрізків. Реалізація такого дерева відрізків працює за $O(\log^2 A \log n)$ на запит, тому все рішення працює за $O((n + q) \log^2 A \log n)$.